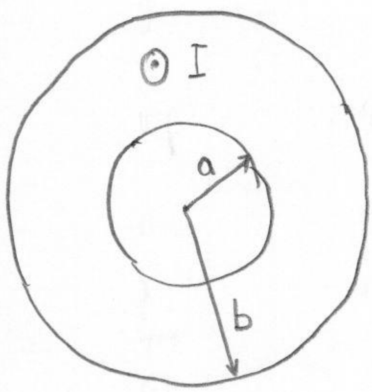
На слици је приказан попречни пресек веома дугачког шупљег праволинијског проводника од алуминијума.

Кроз проводник тече стална струја јачине I, равномерно распоређена по попречном пресеку проводника.

Одредити израз за енергију магнетног поља у проводнику дужине l.



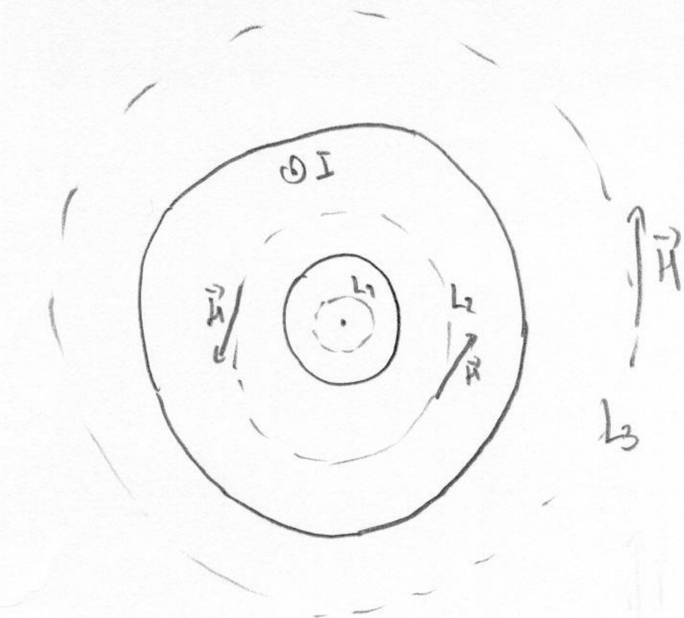
Решење:

Запреминска густина енергије:

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$H = ?$$



1° $r < a$

$$\oint_{L_1} \vec{H} d\vec{l} = \Sigma I$$

$$\Sigma I = 0$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$$

$$\vec{H} \parallel d\vec{l}$$

$$H \int dl = 0$$

$$\Downarrow$$

$$H = 0$$

2° $a < r < b$

$$\oint_{L_2} \vec{H} d\vec{l} = \Sigma I$$

$$\Sigma I = \int_{S_{L_2}} \vec{j} d\vec{S}$$

$$j = \frac{I}{S} = \text{const}$$

$$S = (b^2 - a^2)\pi$$

$$S_{L_2} = (r^2 - a^2)\pi$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_{L_2}} \vec{j} d\vec{s}$$

$$\vec{H} \parallel d\vec{l} \quad \vec{j} \parallel d\vec{s}$$

$$j = \text{const}$$

$$H \oint dl = j \int_{S_{L_2}} ds$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{I}{S} \cdot S_{L_2}$$

$$H \cdot 2\pi r = I \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

3° $r > b$

$$\oint_{L_3} \vec{H} dl = I$$

$$\vec{H} \parallel d\vec{l}$$

$$H \cdot 2\pi r = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Енергија у проводнику дужине l:

$$W = \int_V w \, dV \qquad dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$r \in [a, b]$$

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2 \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$w = \frac{1}{2} \mu \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right]^2 \qquad z \in [0, l]$$

$$W = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{1}{2} \mu \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right]^2 r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$W = \frac{1}{2} \mu \frac{I^2}{4\pi^2} \frac{1}{(b^2 - a^2)^2} \int_a^b \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz$$

$$W = \frac{1}{2} \mu \frac{I^2}{4\pi^2} \frac{1}{(b^2 - a^2)^2} \cdot 2\pi \cdot l \underbrace{\int_a^b \frac{r^4 - 2a^2 r^2 + a^4}{r} dr}_{I_{nt}}$$

$$I_{nt} = \int_a^b \left(r^3 - 2a^2 r + \frac{a^4}{r}\right) dr$$

$$= \frac{r^4}{4}\Big|_a^b - 2a^2 \frac{r^2}{2}\Big|_a^b + a^4 \ln r \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{4}(b^4 - a^4) - a^2 (b^2 - a^2) + a^4 \ln \frac{b}{a}$$

$$W = \frac{1}{2} \mu \frac{I^2}{2\pi} \frac{l}{(b^2-a^2)^2} \left[\frac{1}{4}(b^4-a^4) - a^2(b^2-a^2) + a^4 \ln\frac{b}{a} \right]$$

$$W = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \left[\frac{a^4}{(b^2-a^2)^2} \ln\frac{b}{a} + \frac{1}{4} \frac{\cancel{(b^2-a^2)}(b^2+a^2)}{(b^2-a^2)^{\cancel{2}}} - a^2 \frac{\cancel{b^2-a^2}}{(b^2-a^2)^{\cancel{2}}} \right]$$

$$W = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \left[\frac{a^4}{(b^2-a^2)^2} \ln\frac{b}{a} - \frac{3a^2-b^2}{4(b^2-a^2)} \right]$$